M

No. of Printed Pages : 7

Mock Test Examination, 2015-16

Subject : Mathematics

Class : XII

Time : 3 Hrs.] **[M. M. : 100**

General Instructions :

(i) All questions are compulsory.

(ii) Questions 1-6 in Section 'A' are Very Short Answer Type questions carrying 1 mark each.

(iii) Questions 7-19 in Section 'B' are Long Answer I Type questions carrying 4 marks each.

(iv) Questions 20-26 in Section 'C' are Long Answer II Type questions carrying 6 marks each.

(v) Please write down the serial number of the question before attempting it.

सामान्य निर्देश –

(i) सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।

(ii) खण्ड – अ के प्रश्न संख्या 1-6 तक अति लघु उत्तर वाले प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए 1 अंक निर्धारित है।

(iii) खण्ड – ब के प्रश्न संख्या 7-19 तक दीर्घ उत्तर I प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए 4 अंक निर्धारित हैं।

(iv) खण्ड – स के प्रश्न संख्या 20-26 तक दीर्घ उत्तर II प्रकार के प्रश्न हैं और प्रत्येक प्रश्न के लिए 6 अंक निर्धारित हैं।

(v) उत्तर लिखना प्रारम्भ करने से पहले कृपया प्रश्न का क्रमांक अवश्य लिखिए।

SECTION : A

(खण्ड – अ)

1. If $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ and $A^2 = \lambda A$, then find the value of 'λ'.

   यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ और $A^2 = \lambda A$, तो 'λ' का मान ज्ञात कीजिए।

2. If $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$, then find a unit vector in the direction of $\vec{a} - \vec{b}$.

   यदि $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ और $\vec{b} = 3\hat{i} + \hat{j} - 5\hat{k}$, तो $\vec{a} - \vec{b}$ की दिशा में एक इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

P.T.O.

3121/7

3. Differentiate $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ with respect to x.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)$ का x के सापेक्ष अवकलन ज्ञात कीजिए।

4. If $\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, then write the value of 'x'.

यदि $\begin{vmatrix} x & x \\ 1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, तो '$x$' का मान लिखिए।

5. If $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are perpendicular vectors, $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$ and $|\vec{a}| = 5$, find the value of $|\vec{b}|$.

यदि $\vec{a}$ और $\vec{b}$ लम्बवत् सदिश हैं, $|\vec{a}+\vec{b}| = 13$ और $|\vec{a}| = 5$, तो $|\vec{b}|$ का मान ज्ञात कीजिए।

6. If vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$ are such that $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \frac{2}{3}$ and $\vec{a}\times\vec{b}$ is a unit vector, then find the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$.

यदि सदिश $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ इस प्रकार हैं कि $|\vec{a}| = 3, |\vec{b}| = \frac{2}{3}$ और $\vec{a}\times\vec{b}$ एक इकाई सदिश है, तो $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के बीच कोण ज्ञात कीजिए।

SECTION : B

(खण्ड – ब)

7. Prove that the function f given by $f(x) = |x-2|, x \in R$ is not differentiable at $x = 2$.

सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = |x-2|, x \in R$, $x = 2$ पर अवकलित नहीं है।

8. Using properties of determinants, prove that :

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

सारणिकों के गुणधर्मों का प्रयोग करके, सिद्ध कीजिए –

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & yz \\ y & y^2 & zx \\ z & z^2 & xy \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx)$$

9. Using elementary transformation, find the inverse of the matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$.

OR

If $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, show that $A^2 - 7A - 20I = 0$. Hence, find A^{-1}.

प्रारम्भिक रूपांतरण के प्रयोग से आव्यूह $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

अथवा

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$, तो सिद्ध कीजिए $A^2 - 7A - 20I = 0$ और इसकी सहायता से A^{-1} ज्ञात कीजिए।

10. If $e^x + e^y = e^{x+y}$, then prove that :

$$\frac{dy}{dx} + e^{y-x} = 0$$

OR

If $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, then prove that :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}$$

यदि $e^x + e^y = e^{x-y}$, तो सिद्ध कीजिए –

$$\frac{dy}{dx} + e^{y-x} = 0$$

यदि $\sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-y^2} = a(x-y)$, तो सिद्ध कीजिए –

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}.$$

11. Verify Lagrange's Mean Value theorem for the following function $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$ in $[1, 3]$.
निम्न फलन के लिए लागरेंजे के माध्य मूल प्रमेय की सत्यता कीजिए : $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, $[1, 3]$.

12. Let $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ and $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. Find a vector $\vec{d}$ which is perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$ and $\vec{c} \cdot \vec{d} = 18$.
माना $\vec{a} = \hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 7\hat{k}$ तथा $\vec{c} = 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$. एक सदिश $\vec{d}$ ज्ञात कीजिए, जो $\vec{a}$ तथा $\vec{b}$ दोनों के लम्बवत् है तथा $\vec{c} \cdot \vec{d} = 18$.

13. Find the shortest distance between the lines $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ and $\frac{3-x}{-1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$.

रेखाओं $\frac{x+1}{7}=\frac{y+1}{-6}=\frac{z+1}{1}$ तथा $\frac{3-x}{-1}=\frac{y-5}{-2}=\frac{z-7}{1}$ के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए।

14. For any three vectors $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, prove that $\left[\vec{a}-\vec{b}\ \ \vec{b}-\vec{c}\ \ \vec{c}-\vec{a}\right]=0$.

OR

If θ is the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$, then prove that $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left|\hat{a}+\hat{b}\right|$.

किन्हीं तीन सदिशों $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ के लिए सिद्ध कीजिए $\left[\vec{a}-\vec{b}\ \ \vec{b}-\vec{c}\ \ \vec{c}-\vec{a}\right]=0$.

अथवा

यदि सदिश $\vec{a}$ और $\vec{b}$ के मध्य कोण θ है तो सिद्ध कीजिए $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left|\hat{a}+\hat{b}\right|$.

15. Find the area of the smaller region bounded by ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ and line $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ एवं रेखा $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ से घिरे लघु क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

16. Given two independent events A and B such that P(A) = 0.3, P(B) = 0.6, find :

(i) P(A and B)

(ii) P(A and not B)

(iii) P(A or B)

(iv) P(neither A nor B)

OR

Assume that each born child is equally likely to be a boy or a girl. If a family has two children, what is the conditional probability that both are girls given that :

(i) the youngest is a girl ?

(ii) at least one is a girl ?

A और B स्वतंत्र घटनाएँ दी गई हैं जहाँ P(A) = 0.3, P(B) = 0.6 तो –

(i) P(A और B)

(ii) P(A और B नहीं)

(iii) P(A या B)

(iv) P(A और B में कोई भी नहीं)

के मान ज्ञात कीजिए।

अथवा

मान लीजिए कि जन्म लेने वाले बच्चे का लड़का या लड़की होना समसंभाव्य है। यदि किसी परिवार में दो बच्चे हैं तो दोनों बच्चों की लड़की होने की सप्रतिबंध प्रायिकता क्या है? यदि यह दिया गया है कि –

(i) सबसे छोटा बच्चा लड़की है

(ii) न्यूनतम एक बच्चा लड़की है।

17. Find the probability distribution of number of doublets in three throws of a pair of dice.

पासों के एक जोड़े को तीन बार उछालने पर द्विकों की संख्या का प्रायिकता बंटन ज्ञात कीजिए।

18. A die is tossed again and again untill three sixes are obtained. Find the probability of getting third six in tenth toss.

एक पासे को बार-बार तब तक उछाला जाता है जब तक उस पर 6 का अंक तीन बार प्राप्त नहीं हो जाता। इसकी प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि पासे का तीसरा 6 का अंक उसे दसवीं बार उछालने पर प्राप्त होता है।

19. Find the vector equation of the line passing through the point (1, 2, – 4) and perpendicular to the two lines $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ and $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$.

बिन्दु (1, 2, – 4) से गुजरने वाली रेखा का सदिश समीकरण ज्ञात कीजिए जो दो रेखाओं $\frac{x-8}{3}=\frac{y+19}{-16}=\frac{z-10}{7}$ तथा $\frac{x-15}{3}=\frac{y-29}{8}=\frac{z-5}{-5}$ के लम्बवत् है।

SECTION : C

(खण्ड – स)

20. Find the area of the region bounded by curve $x^2 = 4y$ and the line $x = 4y - 2$.

OR

Using integration, find the area lying above x-axis and included between the circle $x^2 + y^2 = 8x$ and the parabola $y^2 = 4x$.

वक्र $x^2 = 4y$ एवं रेखा $x = 4y - 2$ से घिरे क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

अथवा

समाकलन के प्रयोग से, x-अक्ष के ऊपर, वृत्त $x^2 + y^2 = 8x$ तथा परवलय $y^2 = 4x$ के बीच घिरा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

21. A manufacturing company makes two models A and B of a product. Each piece of Model A requires 9 labour hours for fabricating and 1 labour hour for finishing. Each piece of Model B requires 12 labour hours for fabricating and 3 labour hours for finishing. For fabricating and finishing, the maximum labour hours available are 180 and 30 respectively. The company makes a profit of ₹ 8000 on each piece of Model A and ₹ 12000 on each piece of Model B. How many pieces of Model A and Model B should be manufactured per week to realise a maximum profit ? What is maximum profit per week ? Translate the problem into LPP and solve it graphically.

एक निर्माणकर्ता कम्पनी एक उत्पाद के दो नमूने (प्रतिमान) A और B बनाती है। नमूना A के प्रत्येक नग बनाने के लिए 9 श्रम घंटे और 1 घंटा पॉलिश करने के लिए लगता है जबकि नमूना B के प्रत्येक नग बनाने में 12 श्रम घंटे तथा पॉलिश करने में 3 श्रम घंटों की आवश्यकता होती है। बनाने तथा पॉलिश करने के लिए उपलब्ध अधिकतम श्रम घंटे क्रमशः 180 तथा 30 हैं। कम्पनी नमूना A के प्रत्येक नग पर ₹ 8000 तथा नमूना B के प्रत्येक नग पर ₹ 12000 का लाभ कमाती है। नमूना

A तथा नमूना B के कितने नगों का अधिकतम लाभ कमाने के लिए प्रति सप्ताह निर्माण करना चाहिए? प्रति सप्ताह अधिकतम लाभ क्या है? उपर्युक्त समस्या को रैखिक प्रोग्रामन समस्या बनाकर ग्राफ द्वारा हल कीजिए।

22. Determine the product $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ and use it to solve the system of equations :

$x - y + z = 4, x - 2y - 2z = 9, 2x + y + 3z = 1.$

आव्यूहों के गुणनफल $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए –

$x - y + z = 4, x - 2y - 2z = 9, 2x + y + 3z = 1.$

23. A card from a pack of 52 cards is lost. From the remaining cards of the pack, two cards are drawn and are found to be both diamonds. Find the probability of the lost card being a diamond.

52 ताशों की गड्डी से एक पत्ता खो जाता है। शेष पत्तों से दो पत्ते निकाले जाते हैं जो ईंट के पत्ते हैं। खो गए पत्तों की ईंट होने की प्रायिकता क्या है?

24. Find the image of the point (1, 2, 3) in the plane $x + 2y + 4z = 38$.

OR

Find the foot of perpendicular from the point P(1, 2, 3) on the line $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$.

बिन्दु (1, 2, 3) का समतल $x + 2y + 4z = 38$ में प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

अथवा

बिन्दु P(1, 2, 3) से रेखा $\frac{x-6}{3} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-7}{-2}$ पर लम्ब पाद ज्ञात कीजिए।

25. A diet is to contain at least 80 units of vitamin A and 100 units of minerals. Two foods F_1 and F_2 are available. Food F_1 costs ₹ 4 per unit food and F_2 costs ₹ 6 per unit. One unit of food F_1 contains 3 units of vitamin A and 4 units of minerals. One unit of food F_2 contains 6 units of vitamin A and 3 units of minerals. Formulate this as a linear programming problem. Find the minimum cost for diet that consists of mixture of these two foods and also meets the minimal nutritional requirements. Write the importance of healthy food in the life.

एक भोज्य पदार्थ में कम से कम 80 मात्रक विटामिन A और 100 मात्रक खनिज होना चाहिए। दो प्रकार के भोज्य F_1 तथा F_2 प्रकार के उपलब्ध हैं। भोज्य F_1 की लागत ₹ 4 प्रति मात्रक और F_2 की लागत ₹ 6 प्रति मात्रक है। भोज्य F_1 की एक इकाई में कम से कम 5 मात्रक विटामिन A और 4 मात्रक खनिज है। F_2 की प्रति इकाई में कम से कम 6 मात्रक विटामिन और 3 मात्रक

खनिज है। इसको एक रैखिक प्रोग्रामन समस्या के रूप में सूत्रबद्ध कीजिए। उस आहार का न्यूनतम मूल्य ज्ञात कीजिए, जिसमें इन दोनों भोज्यों का मिश्रण है और उसमें न्यूनतम पोषक तत्व है। जीवन में पौष्टिक भोजन का महत्व लिखिए।

26. Find the cartesian and vector equation of the planes through the intersection of the planes $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+3\hat{j}\right)+6=0$ and $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)=0$ which are at a unit distance from the origin.

समतलों का सदिश तथा कार्तीय समीकरण ज्ञात कीजिए जो समतलों $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+3\hat{j}\right)+6=0$ तथा $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)=0$ के प्रतिच्छेदन से होकर जाती है तथा जो मूल बिन्दु से इकाई दूरी पर है।